

Etapă locală (OLM), Caraș – Severin, 07.02.2026. Clasa a XII-a (Barem de notare și evaluare)

○ *Orice soluție corectă, diferită de cea sugerată în barem, se punctează corespunzător.*

	Din oficiu.	10 p
1.	(a) Se demonstrează imediat inductiv că $x_n = (x+1)^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.	14 p
	Egalitatea din enunț conduce la $(x+1)^n = x+1$. Dacă n este număr par, atunci $x \in \{-1, 0\}$, iar dacă n este impar, avem $x \in \{-2, -1, 0\}$.	8 p
	Total Problema 1.	22 p
2.	(a) Egalitatea evidentă $(xy \cdot xy \cdot \dots \cdot xy) \cdot x = (xy \cdot xy \cdot \dots \cdot xy) \cdot x$, adevărată pentru orice $x, y \in G$, se poate scrie sub forma $x \cdot \underbrace{yx \cdot yx \cdot \dots \cdot yx}_{2026 \text{ de } yx} = \underbrace{xy \cdot xy \cdot \dots \cdot xy}_{2026 \text{ de } xy} \cdot x$, de unde avem: $x(yx)^{2026} = (xy)^{2026} \cdot x$.	6 p
	Folosind implicația din ipoteză rezultă exact $yx = xy, \forall x, y \in G$.	4 p
	(b) $f(xy) = axya^{-1} = ax(a^{-1}a)ya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = f(x)f(y), \forall x, y \in G$.	8 p
	În plus, pentru orice $t \in G$, există un unic $x = a^{-1}ta \in G$ astfel încât $f(x) = t$, deci funcția este și bijectivă.	4 p
	Total Problema 2.	22 p
3.	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$, deci o primitivă este de forma $F(x) = \arcsin \frac{x-1}{2} + C$. (exercițiu cadou, de clasă)	13 p
	Condiția din enunț conduce la $C = \frac{\pi}{6}$ și astfel $F(2) = \frac{\pi}{3}$.	10 p
	Total Problema 3.	23 p
4.	(a) Considerăm funcția derivabilă $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = (1-x) \cdot G(x)$, așadar $\varphi'(x) = -G(x) + (1-x) \cdot G'(x) = -G(x) + (1-x) \cdot g(x)$. Deoarece $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, cu teorema lui Rolle deducem că există $c \in (0,1)$ cu proprietatea că $\varphi'(c) = 0$ și astfel concluzia este imediată.	10 p

	(b) $h(x) = \frac{1+x+e^x-1-e^x}{1+x+e^x} = 1 - \frac{(1+x+e^x)'}{1+x+e^x}$	6 p
	O primitivă este deci de forma $H(x) = x - \ln(1+x+e^x) + C$	4 p
	Din $H(0) = 0 \Rightarrow C = \ln 2$ și astfel $H(1) = \ln \frac{2e}{2+e}$.	2 p
	$k_{\min} = 3$.	1 p
	Total Problema 4.	23 p